

2010.8.21

逆立ちこまの力学



静岡大学工学部
次世代ものづくり人材育成センター
藤間信久 永田照三 太田信二郎

1 はじめに

逆立ちこまは、手軽につくることができる、かなり手ごわい剛体力学の対象である。本文は、子ども向け工作教室指導者のためのバックグラウンドとして、文献 [1] を参考に逆立ちこまの力学をまとめたものである。

はじめに逆立ちこまの運動・構造でキーとなる部分を述べる (図 1)。

- こまは、こまの軸 (以下回転軸と混乱しないようにこまの軸を芯と記す) まわりで回転するのではなく、芯が傾いても最初に与えた回転軸まわりで回転する。
- 初めに与えた重心を通る鉛直軸まわりの角速度はほぼ一定に保たれる (角運動量もほぼ一定)。
- 上記 (角運動量一定) のため、こまの芯まわりの慣性モーメントと、芯に垂直な方向の慣性モーメントはほぼ等しい (材質が一樣であれば形状は球に近くなる)。
- こまの重心はこまの中心 (鉛直下が床に接する) よりも下にある。
- こまは重心を含む鉛直線まわりで回転し、重心下からずれた接地点ではこまと床面とに (回転円の接線方向の) 動摩擦力が生じる。
- この動摩擦力がこまの芯を傾け逆立ちに向ける駆動力となる。
- こまの接地点の軌跡は、芯の傾きとともにらせんを描きながら逆立ちへ向かう。

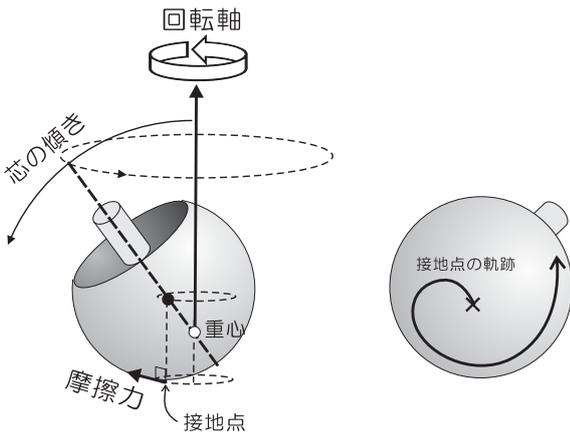


図 1: 逆立ちこまの回転運動の概要

上記を踏まえつつ、こまの運動方程式をたてて逆立ち現象を理解する。

2 こまの座標と角速度・角運動量

慣性系の直角座標を大文字で (X, Y, Z) と表し、慣性系に対するこまの姿勢 (芯の傾きと方位角を示す座標系) を小文字 (x, y, z) で表す (図 2)。こまの芯を z 軸とし、こまは z 軸のまわりで回転するものとする。 (x, y, z) はこまに貼りついた座標系ではないことに注意 [2]。 x, y, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ i, j, k とする。

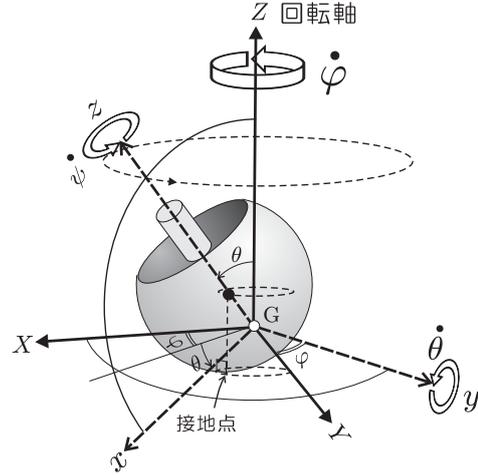


図 2: こまの回転運動を記述する座標系

こまの重心はそれほど移動しないとして、剛体の自由度 6 のうち重心まわり回転の自由度 3 を記述する。こまの回転は、 z 軸の Z 軸に対する角度 θ (y 軸まわりの回転角: 芯の傾き)、 x 軸 (xz 平面) の X 軸に対する角度 φ (Z 軸まわりの回転角)、および z 軸まわりの回転角 ψ で表される。

以上を用いると $((X, Y, Z)$ 系に対する) (x, y, z) 系の角速度 ω は、

$$\omega = -\dot{\varphi} \sin \theta i + \dot{\theta} j + \dot{\varphi} \cos \theta k \tag{1}$$

と表わされ、また、 (X, Y, Z) 系に対するこまの角速度 Ω は

$$\Omega = \omega + \dot{\psi} k = -\dot{\varphi} \sin \theta i + \dot{\theta} j + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) k \tag{2}$$

となる。上式の最終項、芯 (z 軸) まわりの角速度を

$$\dot{\Psi} = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \tag{3}$$

と表すこととする。

こまの芯 (z 軸) まわりの慣性モーメントを C 、芯と垂直方向 (x, y 軸まわり) の慣性モーメントを A とすると、こまのもつ角運動量 L は、

$$L = -A\dot{\varphi} \sin \theta i + A\dot{\theta} j + C\dot{\Psi} k \tag{4}$$

となる。

3 こまの運動方程式

図3のように、こまの大部分を半径 a の球形とし、重心は球の中心 O よりも低い距離 e の位置にあるとする。また、こまは重心まわりに回転する。前述のようにこまの重心位置がそれほど変化しないとして、こまの角運動量の方程式

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \quad (5)$$

のみを考える。右辺 \mathbf{N} は外力の重心まわりのモーメントである。

上式左辺に (x, y, z) 系の角速度 $\boldsymbol{\omega}$ を用いると次式となる。

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}' = \mathbf{N} \quad (6)$$

ここで、 \mathbf{L}' は (x, y, z) 系からみた角運動量 (i, j, k が不変)、左辺第2項は i, j, k の時間微分から生じる項である。

重心まわりの外力のモーメント \mathbf{N} は、接地点での垂直抗力と動摩擦力から生じる。こまの重心位置が垂直方向にそれほど変化しないとして、垂直抗力の大きさは、こまに働く重力 $W = Mg$ で表わされる。また、回転軸まわりの回転がぶれずに接地点が円を描き、動摩擦力は回転円の接線方向 (図3では紙面奥向き: $-j$ 方向) を向くとする。

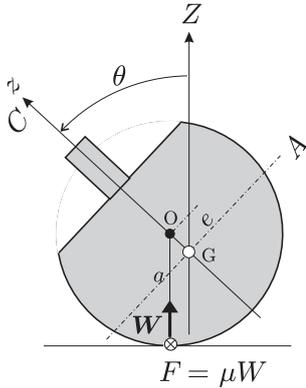


図3: こまに働く外力と重心・接地点

以上の仮定のもとで、こまの芯が θ 傾いているときの \mathbf{N} は、

$$\mathbf{N} = -\mu W(a \cos \theta - e)\mathbf{i} - We \sin \theta \mathbf{j} - \mu W a \sin \theta \mathbf{k} \quad (7)$$

となる。

式(7)と(4)を式(6)へ代入すると、角運動量 \mathbf{L} についての運動方程式がえられる。これを x, y, z 成分ごとに表すと以下ようになる。

$$-A\dot{\varphi} \sin \theta - 2A\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta + C\dot{\Psi}\dot{\theta} = -\mu W(a \cos \theta - e) \quad (8)$$

$$A\ddot{\theta} - A\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + C\dot{\Psi}\dot{\varphi} \sin \theta = -We \sin \theta \quad (9)$$

$$C\ddot{\Psi} = -\mu W a \sin \theta \quad (10)$$

4 運動方程式からわかること

4.1 芯の傾き θ の変化

芯の傾き θ が $0 \sim \pi$ [rad] まで変化すればこまは逆立ちすることになる。はじめに逆立ちを決める θ の変化を考える。式(10)の Ψ に式(3)を代入すると、

$$C(\dot{\varphi} \cos \theta - \dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\psi}) = -\mu W a \sin \theta \quad (11)$$

となる。こまははじめに芯を鉛直方向に向け ($\theta = 0$) 角速度 ω_0 で回転し、芯が傾いてからも鉛直方向にほぼ一定の角速度で回転すると仮定し、 $\dot{\varphi} = \omega_0 = \text{一定}$ 、 $\ddot{\varphi} = 0$ とする。また、回転系から見たこまの芯の回転 ψ の変化も緩やかで $\ddot{\varphi} = 0$ とすると、上式は、

$$\begin{aligned} C\omega_0\dot{\theta} &= \mu W a \\ \dot{\theta} &= \frac{\mu W a}{C\omega_0} \end{aligned} \quad (12)$$

となる。この式から、こまは角速度 $\dot{\theta}$ で傾いていき、逆立ちが起こることがわかる。逆立ちの速さは、摩擦係数が大きいほど速く、回転速度や芯まわりの慣性モーメントが大きいほど遅くなる。

また、仮に重心 G が球中心 O より上になると摩擦力のモーメントの向きが反転し、式(10)の右辺の符号が+となり、(摩擦力からは)逆立ちは起こらないことがわかる。

4.2 接地点のらせん運動

こまの芯まわりの回転 ψ が芯の傾きとともに変化していくと、こまの接地点の軌跡は図1のようにらせんを描く。ここでは、こまの形状 (A と C の比) によって、らせんが時計まわり・反時計まわりに換わることを示す。

式(9)において、 $\ddot{\theta}$ の項は $\dot{\theta}$ の変化が緩やかであるとして省略すると、

$$\begin{aligned} -A\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + C(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})\dot{\varphi} \sin \theta &= -We \sin \theta \\ C\dot{\varphi} \left\{ (1 - A/C)\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \right\} &= -We \end{aligned} \quad (13)$$

となる。右辺が負の定数、 $\dot{\varphi}$ はほぼ一定 (正)、はじめ $\cos \theta > 0$ なので、慣性モーメントの比 A/C によって $\dot{\psi}$ の符号が変化する。すなわち、軌跡が時計まわりになったり反時計まわりになったりする可能性がある。

式(13)に $\dot{\varphi} = \omega_0$ を代入すると、 ψ についての方程式

$$\dot{\psi} = \left(\frac{A}{C} - 1 \right) \omega_0 \cos \theta - \frac{We}{C\omega_0} \quad (14)$$

が得られ、式(12)、 $dt = C\omega_0 / (\mu W a) d\theta$ を利用して上式を積分すると ($t = 0$ で $\psi = 0$)、

$$\psi = \left(\frac{A}{C} - 1 \right) \frac{C\omega_0^2}{\mu W a} \sin \theta - \frac{e}{\mu a} \theta \quad (15)$$

となる． $\theta \sim 0$ のとき，右辺第 1 項 $>$ 第 2 項なので $A > C$ であれば $\psi > 0$ ，すなわち接地点の軌跡は反時計まわり， $A < C$ であれば $\psi < 0$ ，時計まわりとなる．また，逆立ちの完成時 ($\theta = \pi$) では， $\psi = -\pi e/(\mu a)$ となる．

4.3 接地点のすべり:逆立ちの条件

逆立ちこまをまわしていると，こまがあまり動かず同じ位置でまわっているとき，きれいに逆立ちが起こり，ころがってしまうような場合は逆立ちが起こりにくいことに気付く．

これは，接地点における動摩擦力が逆立ちの駆動力になるからであり，接地点がすべっていないと逆立ちは起こらない．すなわち，接地点における対地速度の大きさ v が 0 の場合はころがってしまって逆立ちは起こらない．「 $v > 0$ 」が逆立ちの条件の一つとなる．

図 2 より， v は

$$v = (\dot{\varphi}e + \dot{\psi}a) \sin \theta \quad (16)$$

と表わされる． $v > 0$ のためには，

$$\dot{\varphi}e + \dot{\psi}a > 0 \quad (17)$$

でなければならない．上式に， $\dot{\varphi} = \omega_0$ と式 (14) を代入すると，

$$\omega_0 \left\{ e + \left(\frac{A}{C} - 1 \right) a \cos \theta - \frac{Wea}{C\omega_0^2} \right\} > 0 \quad (18)$$

をえるが，左辺最終項は小さいとして省略すると，

$$e + \left(\frac{A}{C} - 1 \right) a \cos \theta > 0 \quad (19)$$

となる． $0 < \theta < \pi$ の範囲で上の条件を満足するためには， $A > C$ のとき，

$$\begin{aligned} e &> \left(\frac{A}{C} - 1 \right) a \\ \frac{A}{C} &< 1 + \epsilon \end{aligned} \quad (20)$$

一方， $A < C$ のとき，

$$\begin{aligned} e &> \left(1 - \frac{A}{C} \right) a \\ \frac{A}{C} &> 1 - \epsilon \end{aligned} \quad (21)$$

となり，両式をまとめると，

$$1 - \epsilon < \frac{A}{C} < 1 + \epsilon \quad (22)$$

となる．ここで $\epsilon = e/a$ である． $e/a \ll 1$ の条件のもとでは $A \sim C$ となり，こまの形状は球に近くなることがわかる．

5 逆立ちこまの実例:理論との比較

前節の運動方程式の解釈から，逆立ちこま実現のためには，こまの重心位置が球中心より下にあること，芯とそれに垂直方向の慣性モーメントの比が 1 に近い一定の範囲に収まる必要があることがわかった．ここでは，「ゆめ画材」から販売されているこまのキット (大小 2 種)[3] を例にして，これらの条件が満足されているかどうかを確認する．

こまの形状は，図 4 のように，一様な材質の半径 a の球を基本に，北半球の北極圏を切り取り，極軸方向に芯棒 (材質は球と同じ) が取り付けられたものとする．形状を表す諸量として表 1 に示す記号を用いる．ギリシャ文字で表した第 2 グループの諸量は球の半径 a で規格化した量を表す．原点は球の中心にとるものとする．また，重心 e は距離ではなく，中心からの座標としてとってある (中心より低ければ負となる)．実寸の単位は [mm] である．

表 1: こまの形状を表す諸量

寸法等	記号	こま大	こま小
球の半径	a	18.5	14.5
切断面までの高さ	c	9.0	7.0
芯棒の長さ	l	21.0	15.0
芯棒の半径	b	3.0	2.0
重心	e	-1.85	-1.63
c/a	χ	0.486	0.483
l/a	λ	1.14	1.03
b/a	β	0.162	0.138
e/a	ϵ	-0.100	-0.113
密度 [g/cm ³]	ρ	0.60	0.60

なお，こまを南半球，北半球，芯棒の 3 部分に分け，それぞれの量を添え字 h, r, c, b で表す．

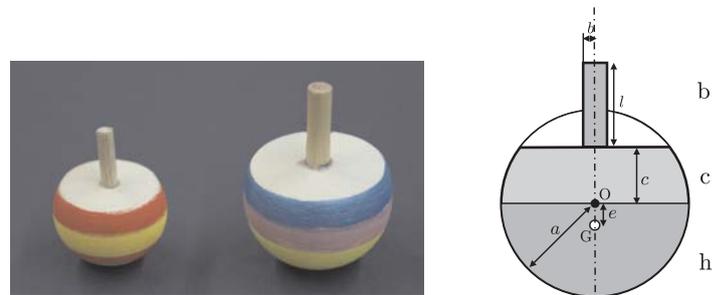


図 4: こまの形状およびその諸量と部位

5.1 体積・質量

各部の体積は半径 r , 厚さ dz の薄い円板の体積 $\pi r^2 dz$ を積分することにより求める．例えば, V_c であれば,

$$V_c = \int_0^c \pi(a^2 - z^2) dz$$

を計算することにより下記の V_c を得る．

$$M_h = \rho V_h = \rho \frac{2}{3} \pi a^3$$

$$M_c = \rho V_c = \rho \pi c \left(a^2 - \frac{c^2}{3} \right) = \rho \pi a^3 \chi \left(1 - \frac{\chi^2}{3} \right)$$

$$M_b = \rho V_b = \rho \pi b^2 l = \rho \pi a^3 \beta^2 \lambda$$

$$M = M_h + M_c + M_b = \rho \pi a^3 \left\{ \frac{2}{3} + \chi \left(1 - \frac{\chi^2}{3} \right) + \beta^2 \lambda \right\}$$

5.2 重心

各部の重心は, 半径 r , 厚さ dz の薄い円板の質量 $\rho \pi r^2 dz$ の加重平均 ($z \times$ 質量の平均) を求めることにより得られる．例えば, Z_c であれば,

$$Z_c = \frac{1}{M_c} \int_0^c \rho \pi (a^2 - z^2) z dz$$

を計算することにより下記の Z_c を得る．

$$Z_h = -\frac{3}{8} a$$

$$Z_c = a \chi \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\chi^2}{2} \right) \left(1 - \frac{\chi^2}{3} \right)^{-1}$$

$$Z_b = a \left(\frac{\lambda}{2} + \chi \right)$$

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{M} (M_h Z_h + M_c Z_c + M_b Z_b) \\ &= a \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{\chi^2}{2} \left(1 - \frac{\chi^2}{2} \right) + \beta^2 \lambda \left(\frac{\lambda}{2} + \chi \right) \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{2}{3} + \chi \left(1 - \frac{\chi^2}{3} \right) + \beta^2 \lambda \right\}^{-1} \end{aligned}$$

重心が球の中心より下になるためには上式右辺第 1 カッコ第 2, 第 3 項の和が $1/4$ より小さくなくてはならない．

5.3 芯まわりの慣性モーメント C

各部の芯まわりの慣性モーメントは半径 r , 厚さ dz の薄い円板の (中心をとる垂線まわりの) 慣性モーメント $\rho \pi r^4 dz/2$ を積分することにより求める．例えば, I_c であれば,

$$I_c = \frac{1}{2} \int_0^c \rho \pi (a^2 - z^2)^2 dz$$

を計算することにより下記の I_c を得る．

$$I_h = \frac{2}{5} M_h a^2 = \frac{4}{15} \rho \pi a^5$$

$$I_c = \frac{1}{2} \rho \pi a^5 \chi \left(1 - \frac{2}{3} \chi^2 + \frac{1}{5} \chi^4 \right)$$

$$I_b = \frac{1}{2} M_b b^2 = \frac{1}{2} \rho \pi a^5 \beta^4 l$$

$$C = I_h + I_c + I_b$$

$$= \rho \pi a^5 \left\{ \frac{4}{15} + \frac{1}{2} \chi \left(1 - \frac{2}{3} \chi^2 + \frac{1}{5} \chi^4 \right) + \frac{1}{2} \beta^4 l \right\}$$

5.4 芯に垂直な軸まわりの慣性モーメント A

各部の芯に垂直で重心をとる軸まわりの慣性モーメントは, 平板の定理により得られる, 半径 r , 厚さ dx の薄い円板の, 動径を軸とする慣性モーメント $\rho \pi r^4 dx/4$ を, 平行軸の定理にしたがって, 軸を系の重心 e まわりに移動した慣性モーメント $\rho \pi r^4 dx/4 + \rho \pi r^2 (x - e)^2 dx$ を積分することにより得られる．例えば, J_c であれば,

$$J_c = \int_0^c \rho \pi \left\{ \frac{1}{4} (a^2 - x^2)^2 + (a^2 - x^2)(x - e)^2 \right\} dx$$

を計算することにより下記の J_c を得る．

$$J_h = \rho \pi a^5 \left(\frac{4}{15} + \frac{1}{2} \epsilon + \frac{2}{3} \epsilon^2 \right)$$

$$J_c = \rho \pi a^5 \chi \left\{ -\frac{3}{20} \chi^4 + \frac{\epsilon}{2} \chi^3 + \left(\frac{1}{6} - \frac{\epsilon^2}{3} \right) \chi^2 - \epsilon \chi + \frac{1}{4} + \epsilon^2 \right\}$$

$$J_b = \rho \pi a^5 \beta^2 \lambda \left\{ \frac{\lambda^2}{12} + \left(\chi + \frac{\lambda}{2} - \epsilon \right)^2 \right\}$$

$$A = J_h + J_c + J_b$$

表 1 の大小のこまの諸量を上記の式に代入し, 重心位置 ϵ と A/C を計算すると, 表 2 となる．

表 2: こまの重心 ϵ と慣性モーメントの比 A/C の計算例

こま	ϵ	A/C	$1 - \epsilon \sim 1 + \epsilon $
大	-0.100	0.902	0.900~1.100
小	-0.113	0.864	0.887~1.113
小 ($b = 2.6$)	-0.099	0.902	0.901~1.099
大 ($l = 20$)	-0.102	0.894	0.898~1.102

上表から, どちらのこまも重心は球中心よりも下にあり, こま大の場合, A/C の逆立ち条件をかるうじてクリアし, こま小の場合はわずかに条件を下回っている．実際のこまはどちらも逆立ちする．ただし, 逆立ちまでの芯の傾き方は緩やかで (見ている方はこちらの方がおもしろいが), ス

ムーズな逆立ちとは言いがたい。試みに、こま小の芯径を1.2mmほど大きくした場合を計算すると、上表最終行のように条件を満足する範囲に入ってくる。実際、芯に金属テープなどを巻くと逆立ちは起こりやすくなった。

また、芯の長さは A の値に大きく影響するため、正確である必要がある。例えば表最終列のように、こま大で芯の長さを1mm短くすると、逆立ち条件からはずれてしまう。こまによってよく逆立ちするこま、しないこまが現れるのはこの辺が一因と思われる。

5.5 3Dプロッタによるこまの製作

3Dプロッタ(3次元加工機)を用いると、種々の形のこまをCADデータにしたがってかなり自由につくることができる。ここでは前節で用いた「ゆめ画材」のこまとの比較のため、形状の近い図5、表3に示す3種のこまを製作した。材質は一樣でケミカルウッドとよばれる木粉を化学的に固めたものである(密度:0.75 g/cm³)。また、3DプロッタとしてRoland・MDX-40を使用した。

表3: 3Dプロッタで製作したこまの形状 ($a \sim b$ [mm])

	a	c	l	b	ϵ	A/C
1	15.0	7.5	15.0	3.0	-0.086	0.924
2	15.0	5.0	12.5	2.0	-0.186	0.783
3	15.0	12.5	12.5	3.0	0.014	1.063

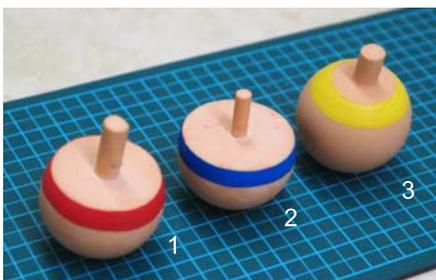


図5: 3Dプロッタで製作したこま(左から1, 2, 3)

こま1は A/C が条件範囲内にあるもの、こま2は A/C が条件範囲をかなり外れるもの、こま3は重心が正(中心より上)にあるものである。

こまを回した結果、予想通り、こま1は逆立ち、こま2は安定した通常の回転($\theta \sim 0$)、こま3は、重心が高いためすぐに芯を傾げるものの、 $\theta = \pi/2$ のまわりで芯が上下に揺れるのみで逆立ちには到らなかった(θ の揺らぎが大きい場合、まれに芯が接地して逆立ちすることがあった)。これらの検証例を見る限り、条件式(22)は、境界の正確さとはともかくとして、逆立ちの起こる基本的な条件として、こま製作の指針になるものと思われる。

6 むすび

材質が一樣で球に近い形状をもつこまについて運動方程式をたて、逆立ち運動の様子や逆立ちが起こる条件を議論し、また、実際のこまとの比較を行った。ここで求めた条件は逆立ちこまを設計する際の指針を与えるものであるが、材質が一樣であるといきおい重心が球の中心直下にある(e が小さい)球形のこまとなってしまう。また一樣材質で $A/C > 1$ とするのも重心が上がってしまい逆立ちは難しい。北半球の南半球で材質が異なるこま、表面のみに質量が分布する球核状のこまを製作すれば、より形状のバリエーションに富んだ逆立ちこまができるであろう。また、SolidWorks等のCADソフトは設計した物体の慣性モーメントを計算してくれる。計算の苦手な方や、単純な形状でないこまを設計するには大きな威力を発揮する。

理論との比較は難しくなるが、身の回りの色々なものでこまをつくってみるのもおもしろい。図6は、ガチャガチャのカプセル(直径39mm)とこむぎねんどでつくった逆立ちこまである。カプセルは小さい方が逆立ちしやすい。手軽・安価にできて、ねんどの貼り付け具合で条件を変えることができるので子どもたちの実験に使える。カプセルでなくても、使い終わった化粧品や調味料びんのふた・キャップで球状のものがあれば逆立ちこまにすることができる。



図6: ガチャガチャのカプセル(直径39mm)とこむぎねんどで製作したこま

逆立ちこまの運動は、芯のまわりで高速回転しながら歳差運動を行う通常のこまの運動とは大きく異なるものであることがわかった。こまの身になって考えてみると、「自分ではちゃんとまっすぐ回っているつもりが(角運動量はほぼ一定に保たれてるが)、知らない間に摩擦力によって芯が傾き、気が付いたら、逆立ちした何とも情けない姿で回っていた。トホホ…」といったところだろうか。

参考文献

- [1] 酒井高男, 数理科学 211, 30 (1981).
- [2] 原島 鮮, 力学(改訂版), 裳華房(1982). 現在は3訂版が出版されている。
- [3] ゆめ画材, 逆立ちこまセット, zk-2314-870